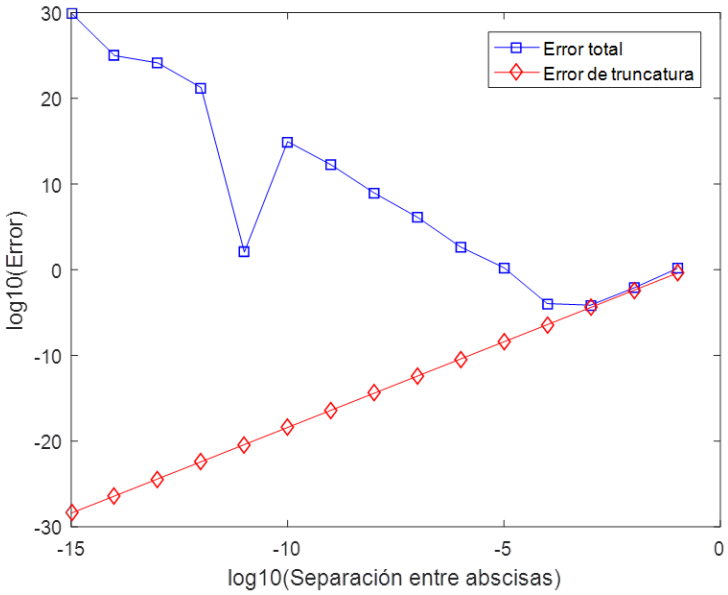
Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

Sesión 9ª

DERIVACIÓN NUMÉRICA CON MATLAB



Abril, 2019

C. Conde, A. Fidalgo, R. Gómez, A. López, M. Pilar Martínez de la Calle

USO DE FÓRMULAS DE DERIVACIÓN NUMÉRICA

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

PRIMER OBJETIVO:

Utilizar fórmulas numéricas, de las que se conocen sus coeficientes y las abscisas del soporte que utilizan, para evaluar derivadas de orden k en una abscisas dada

USO DE FÓRMULAS DE DERIVACIÓN NUMÉRICA

Las fórmulas de derivación numérica que aproximan derivadas de orden k en una abscisa x* son de la forma:

$$f^{(k}(x^*) \approx \sum_{J=0}^{n} c_J \cdot f(s_J)$$

donde c_i son los coeficientes de la fórmula y s_i las abscisas del soporte sobre el que se construye la fórmula

Si {c} es el vector de coeficientes y {s} el de abscisas del soporte, el uso de la fórmula se reduce a realizar el producto escalar del vector {c} por el vector {f(s)}. Esto en MATLAB se puede realizar de distintas maneras, como se ilustra en el siguiente ejemplo

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

USO DE FÓRMULAS DE DERIVACIÓN NUMÉRICA

EJERCICIO 1 (P9_EJ1)

Prográmese en MATLAB el cálculo del valor aproximado de f'(1) siendo f(x) = sen(x·π/2) mediante la fórmula

$$\frac{2}{105.h}.f(x^* - 2.h) - \frac{13}{12.h}.f(x^* - \frac{1}{2}.h) + \frac{11}{10.h}.f(x^* + \frac{1}{2}.h) - \frac{1}{28.h}.f(x^* + \frac{3}{2}.h)$$

utilizando el soporte: s = {0.8, 0.95,1.05, 1.15}

Solución:

Según se indica en el enunciado x*=1. Además, como s_1= x*-2h = 0.8, se tiene que h = 0.1. Con ello el vector de coeficientes resulta: **c = {20/105, -130/12, 11, -10/28}**

Escribamos el programa pedido

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

USO DE FÓRMULAS DE DERIVACIÓN NUMÉRICA

```
clear
syms x f(x)
s=[0.8, 0.95,1.05, 1.15];
c=[20/105,   -130/12,  11,  -10/28];
funcion(x)= sin(pi*x./2);
f1(x)=diff(funcion(x));
f=eval(funcion(s));
n=length(s);
vap=0;
for J=1:1:n
    vap=vap+f(J)*c(J);
end
vex=double(f1(1.));
disp(['Valor exacto = ', num2str(vex),...
  '     Valor aproximado = ', num2str(vap)])
```

Con un bucle

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

USO DE FÓRMULAS DE DERIVACIÓN NUMÉRICA

```
clear
syms x f(x)
s=[0.8, 0.95,1.05, 1.15];
c=[20/105,   -130/12,  11,  -10/28];
funcion(x)= sin(pi*x./2);
f1(x)=diff(funcion(x));
f=eval(funcion(s));
n=length(s);

vap=dot(c,f);

vex=double(f1(1.));
disp(['Valor exacto = ', num2str(vex),...
  '      Valor aproximado = ', num2str(vap)])
```

Usando el comando
dot( )

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

USO DE FÓRMULAS DE DERIVACIÓN NUMÉRICA

```
clear
syms x f(x)
s=[0.8, 0.95,1.05, 1.15];
c=[20/105,   -130/12,  11,  -10/28];
funcion(x)= sin(pi*x./2);
f1(x)=diff(funcion(x));
f=eval(funcion(s));
n=length(s);
```

```
vap=sum(c.*f);
```

Sumando elementos del vector obtenido multiplicando elemento a elemento

```
vex=double(f1(1.));
disp(['Valor exacto = ', num2str(vex),...
 '     Valor aproximado = ', num2str(vap)])
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

USO DE FÓRMULAS DE DERIVACIÓN NUMÉRICA

```
clear
syms x f(x)
s=[0.8, 0.95,1.05, 1.15];
c=[20/105,   -130/12,  11,  -10/28];
funcion(x)= sin(pi*x./2);
f1(x)=diff(funcion(x));
f=eval(funcion(s));
n=length(s);
```

```
vap =c*f.';
```

Producto de vector fila por vector columna

```
vex=double(f1(1.));
disp(['Valor exacto = ', num2str(vex),...
  '     Valor aproximado = ', num2str(vap)])
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

USO DE FÓRMULAS DE DERIVACIÓN NUMÉRICA

EN TODOS LOS CASOS

```
>> P9_EJ1
Valor exacto=0 Valor aproximado = 3.154e-05
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO -1

Una fórmula que permite aproximar f"(0) es la siguiente:

$$f''(0) = \frac{-f_0 + 16 \cdot f_1 - 30 \cdot f_2 + 16 \cdot f_3 - f_4}{12 \cdot h^2}$$

donde, siendo h un valor real positivo, se utiliza el soporte: [-2h, -h, 0, h, 2h].

<u>Se pide</u>, aplicar la fórmula anterior en un script MATLAB, para evaluar una aproximación de la función f(x)=sen(x·π/2) en x*=0 y h = 0.05. Comparar el valor exacto y el aproximado.

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO -1

```
clear
syms x f(x) f2(x)
xs=0;  h=0.05;
s=[xs-h, xs-h/2, xs, xs+h/2, xs+h];
c=[-1, 16, -30, 16,-1]/(12*h^2);
f(x)=sin(x*pi./2);
f2(x)=diff(f(x),2);
vf=f(s);
valor=sum(c.*vf);
vapr=eval(valor);
vex=double(f2(xs));
disp(['Valor aproxim. = ', num2str(vapr)])
disp(['Valor exacto = ', num2str(vex)])
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO-1

```
>> P9_EP1
   Valor aproxim. = 0
   Valor exacto = 0
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EVOLUCIÓN DEL ERROR DE DERIVACIÓN NUMÉRICA

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

SEGUNDO OBJETIVO:

Analizar la evolución del error entre el valor exacto y los valores aproximados por fórmulas numéricas al aplicarlas para estimar derivadas de orden k cuando se varía la distancia entre puntos del soporte

EVOLUCIÓN DEL ERROR DE DERIVACIÓN NUMÉRICA

EJERCICIO P9_EJ2

2º Siendo h un valor estrictamente positivo, una fórmula que permite aproximar el valor de la 3ª derivada de una función f(x) en una abscisa x* sobre el soporte $\{x^*-h, x^*+h, x^*+2h, x^*+3h, x^*+4h\}$ es:

$$f'''(x^*) \approx \frac{-f(x^*-h)+8f(x^*+h)-14f(x^*+2h)+9f(x^*+3h)-2f(x^*+4h)}{2h^3}$$

Se pide:

2-1º) Escríbase un subprograma **function** **MATLAB**, *llamado* **D35** *en el que tomando como* ***argumentos de entrada****: x* (abscisa en la que se evalúa la 3ª derivada)*

h (valor real estrictamente positivo)

f (función cuya derivada 3ª se quiere aproximar)

se calcule como ***argumento de salida*** *el valor VAP que aproxima f'''(x*) mediante la fórmula anterior.*

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EVOLUCIÓN DEL ERROR DE DERIVACIÓN NUMÉRICA

2-2º) Escríbase un script, llamado **PD35**, *en el que se utilice el subprograma desarrollado en el apartado anterior para evaluar las aproximaciones de la derivada 3ª de la función* $f(x)=e^{(1-x)}\cdot\sin(\pi\cdot x)$ *en el punto* $x^*=1$, *utilizando los valores de* $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, \ldots, 0.1\cdot 2^{-30}$.

Además, sabiendo que el valor exacto de la 3ª derivada en $x^*=1$ *es* $f'''(0)=-1$, *el script debe obtener para cada valor de h el valor absoluto del error cometido y representar la evolución del error en una gráfica logarítmica.*

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EVOLUCIÓN DEL ERROR DE DERIVACIÓN NUMÉRICA

```
function [VAP]= D35(xs, h, f)
% ESTA FUNCIÓN APROXIMA f”’(x*) USAN-
% DO LA FÓRMULA:
% f’(x*)~[(-f(x*-h)+8·f(x*+h)-
%         -14·f(x*+2h)+9·f(x*+3h)-
%         -2·f(x*+4h)]/(2*h^3)
   s=[xs-h;xs+h;xs+2*h;xs+3*h;xs+4*h];
   c=(1/(2*h^3))*[-1; 8; -14; 9; -2];
   F=f(s);
   VAP=sum(c.*F);
end
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EVOLUCIÓN DEL ERROR DE DERIVACIÓN NUMÉRICA

```
% Limpiamos la memoria
clear
% Declaramos simbólicas la variable x % y
la función f(x)
syms x f(x)
% Proporcionamos valores a los datos
% NCASOS: nº de valores que tomará h
% xs: punto en el que se aproxima la %
3ªderivada
% y definimos la función f(x)
NCASOS=20;
xs=1.;
f(x)= exp(1-x)*sin(pi*x);
```

(...)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EVOLUCIÓN DEL ERROR DE DERIVACIÓN NUMÉRICA

(...)

```
% Evaluamos la expresión exacta de la
% tercera derivada y su valor en xs
f1=diff(f(x),x,3);
Vex=eval(subs(f1,x,xs))
% Inicializamos h con el doble del
% primer valor con el que se quiera
% aplicar la fórmula ...
h=0.2;
```

(...)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EVOLUCIÓN DEL ERROR DE DERIVACIÓN NUMÉRICA

```
% Para los valores I=1,2,3,…, NCASOS
for I=1:1:NCASOS
    h=h/2; % Reducimos h a la mitad …
     % … y usamos D35 para evaluar
     % el valor aproximado …
     [aux]= D35(xs, h, f);
     % .. almacenándolo como VAPR(I)…
     VAPR(I)=eval(aux);
     % … guardando como H(I) el tamaño
     % del paso (h) usado y evaluando
     % en ERTR(I) el valor absoluto
     % del error cometido…
     H(I)=h;
     ERTR(I)=abs(Vex-VAPR(I));
     % ... y pasamos al caso siguiente
end
```

(…)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EVOLUCIÓN DEL ERROR DE DERIVACIÓN NUMÉRICA

```
% Representamos en una gráfica para cada
% logarimo decimal de los valores de h
% considerados, el logaritmo decimal del
% error cometido.
plot(log10(H),log10(ERTR),'-sr')
xlabel('Log10(semilongitud intervalo)')
ylabel('Log10 error Derivación')
% Escribimos en pantalla para cada valor
% de h usado, el valor exacto y el
% aproximado calculado.
format long
for ICASO=1:1:NCASOS
    disp(['H= ', num2str(H(ICASO)), ...
          '   VEX = ', num2str(Vex), ...
          '   VAPR= ',num2str(VAPR(ICASO))])
end
                                        (...)
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EVOLUCIÓN DEL ERROR DE DERIVACIÓN NUMÉRICA

```
% Escribimos en pantalla para cada valor
% de h usado, el error cometido.
for ICASO=1:1:NCASOS
    disp(['H= ', num2str(H(ICASO)), ...
      '   Error = ',num2str(ERTR(ICASO))])
end
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EVOLUCIÓN DEL ERROR DE DERIVACIÓN NUMÉRICA

```
>> PD35
Vex =  21.581498719530437

H= 0.1          VEX = 21.5815   VAPR= 19.973
H= 0.05         VEX = 21.5815   VAPR= 21.3717
H= 0.025        VEX = 21.5815   VAPR= 21.5583
H= 0.0125       VEX = 21.5815   VAPR= 21.5796
H= 0.00625      VEX = 21.5815   VAPR= 21.5815
H= 0.003125     VEX = 21.5815   VAPR= 21.5816
H= 0.0015625    VEX = 21.5815   VAPR= 21.5815
H= 0.00078125   VEX = 21.5815   VAPR= 21.5815
H= 0.00039063   VEX = 21.5815   VAPR= 21.5815
H= 0.00019531   VEX = 21.5815   VAPR= 21.5815
H= 9.7656e-05   VEX = 21.5815   VAPR= 21.5815
H= 4.8828e-05   VEX = 21.5815   VAPR= 21.5815
H= 2.4414e-05   VEX = 21.5815   VAPR= 21.5815
H= 1.2207e-05   VEX = 21.5815   VAPR= 21.5815
H= 6.1035e-06   VEX = 21.5815   VAPR= 29.0981
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO 2º

```
H= 3.0518e-06   VEX = 21.5815   VAPR= -69.2285
H= 1.5259e-06   VEX = 21.5815   VAPR= -812.9033
H= 7.6294e-07   VEX = 21.5815   VAPR= 5519.3647
H= 3.8147e-07   VEX = 21.5815   VAPR= 53428.5449
H= 1.9073e-07   VEX = 21.5815   VAPR= -351836.5
H= 0.1          Error = 1.6085
H= 0.05         Error = 0.20984
H= 0.025        Error = 0.023227
H= 0.0125       Error = 0.0018556
H= 0.00625      Error = 4.7343e-05
H= 0.003125     Error = 7.6778e-05
H= 0.0015625    Error = 2.7377e-05
H= 0.00078125   Error = 7.8457e-06
H= 0.00039063   Error = 2.0491e-06
H= 0.00019531   Error = 6.1862e-07
H= 9.7656e-05   Error = 3.802e-07
H= 4.8828e-05   Error = 2.2875e-06
H= 2.4414e-05   Error = 1.5271e-06
```

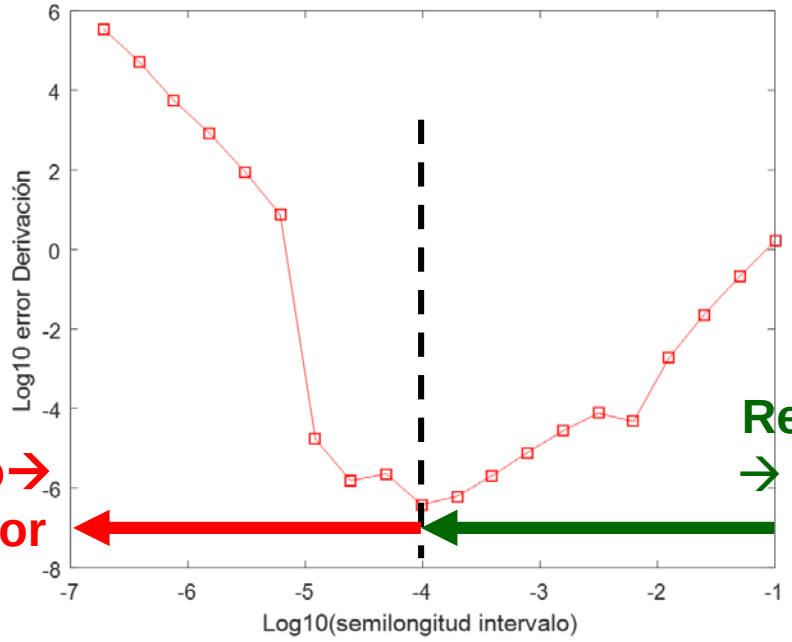
Reducciones de paso a ½ conllevan reducciones de error a $(½)^2$

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EVOLUCIÓN DEL ERROR DE DERIVACIÓN NUMÉRICA

```
H= 1.2207e-05   Error = 1.6786e-05
H= 6.1035e-06   Error = 7.5166
H= 3.0518e-06   Error = 90.81
H= 1.5259e-06   Error = 834.4848
H= 7.6294e-07   Error = 5497.7832
H= 3.8147e-07   Error = 53406.9634
H= 1.9073e-07   Error = 351858.0815
```

Reducciones de paso implican crecimiento de los errores (por el redondeo)



Reducción de paso → Aumento de error *(Predomina error de redondeo)*

Reducción de paso → Reducción de error *(Predomina error de truncatura)*

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO -2

Una fórmula que permite aproximar f'(x) es la siguiente:*

$$f'(x^*) \approx \frac{1}{h}\cdot\left(\frac{2}{105}\cdot f\left(x^* - 2\cdot h\right) - \frac{13}{12}\cdot f\left(x^* - h/2\right) + \frac{11}{10}\cdot f\left(x^* + h/2\right) - \frac{1}{28}\cdot f\left(x^* + 3\cdot h/2\right)\right)$$

donde h es un valor real positivo.

Se pide:

1º) Escríbase un subprograma **`function`** **MATLAB**, *en el que tomando como argumentos de entrada:*

x (abscisa en la que se evalúa la primera derivada)*

h (valor real estrictamente positivo)

f (función cuya derivada primera se quiere aproximar)

se calcule el valor aproximado de f'(x) mediante la fórmula anterior.*

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO -2

2º) Escríbase un script, llamado **P9_EJ2**, *en el que se utilice el subprograma desarrollado en el apartado anterior para evaluar las aproximaciones de la derivada 1ª de la función* $f(x)=e^{x}\cdot\cos(x)$ *en el punto* $x^*=0$, *utilizando los valores de* $h = 1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, \ldots, 2^{-49}$.

Además, sabiendo que el valor exacto de la primera derivada en x es f'(0)=1, el script debe obtener para cada valor de h el error cometido y representar la evolución del error en una gráfica logarítmica.*

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO -2

```
function [vaprox]= fP9_EJ2(xs, h, f)
% ESTA FUNCIÓN CALCULA LA APROXIMACIÓN DE
% f'(x*) UTILIZANDO LA FÓRMULA:
% f'(x*)~[(2/105)·f(x*-2h)-
% (13/12)·f(x*-h/2)+(11/10)·f(x*+h/2)-
% (1/28)·f(x*+3h/2)]/h
    s=[xs-2*h; xs-h/2; xs+h/2; xs+3*h/2];
    c=(1/h)*[2/105; -13/12; 11/10; -1/28];
    F=f(s);
    vaprox=sum(c.*F);
end
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO -2

```
clear
% Declaramos simbólicas la variable x f(x)
syms x f(x)
% Proporcionamos valores a los datos
% NCASOS: nº de valores que tomará h
% xs: punto en el que se aproxima la 1ª
%       derivada
% y definimos la función f(x)
NCASOS=50;
xs=0.;
f(x)= exp(x)*cos(x);
% Evaluamos la expresión exacta de la
% primera derivada y su valor en xs
f1=diff(f(x),x);
Vex=eval(subs(f1,x,xs))
```

(...)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO -2

(…)

```
% Inicializamos h con el doble del primer
% valor con el que se quiera calcular ..
h=2;
% Para los valores de I = 1,2,3, …, NCASOS
for I=1:1:NCASOS
     h=h/2; % Reducimos h a la mitad …
    % … y usamos fP7_EJ2 para evaluar
    % el valor aproximado …
    [aux]= FPR9_EJ2(xs, h, f);
    % .. almacenándolo como VAPR(I)…
    VAPR(I)=eval(aux);
```

(…)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO -2

(…)

```
        % … guardando como H(I) el tamaño de
        % de paso (h) usado y evaluando en
        % ERTR(I) el error cometido…
        H(I)=h;
        ERTR(I)=abs(Vex-VAPR(I));
        % y pasamos al caso siguiente
    end
    % Representamos en una gráfica para cada
    % logarimo decimal de los valores de h
    % considerado, el logaritmo decimal del
    % error cometido.
    plot(log10(H),log10(ERTR),'-sr')
    xlabel('Log10(semilongitud intervalo)')
    ylabel('Log10 error Derivación')
```

(…)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO -2

```
(...)
% Escribimos en pantalla para cada valor
% de h usado, el valor exacto y el
% aproximado calculado.
format long
for ICASO=1:1:NCASOS
    disp(['H= ', num2str(H(ICASO)), ...
        '   VEX = ', num2str(Vex), ...
        '   VAPR= ',num2str(VAPR(ICASO))])
end
% Escribimos en pantalla para cada valor
% de h usado, el error cometido.
for ICASO=1:1:NCASOS
    disp(['H= ', num2str(H(ICASO)), ...
      '   Error = ',num2str(ERTR(ICASO))])
end
```

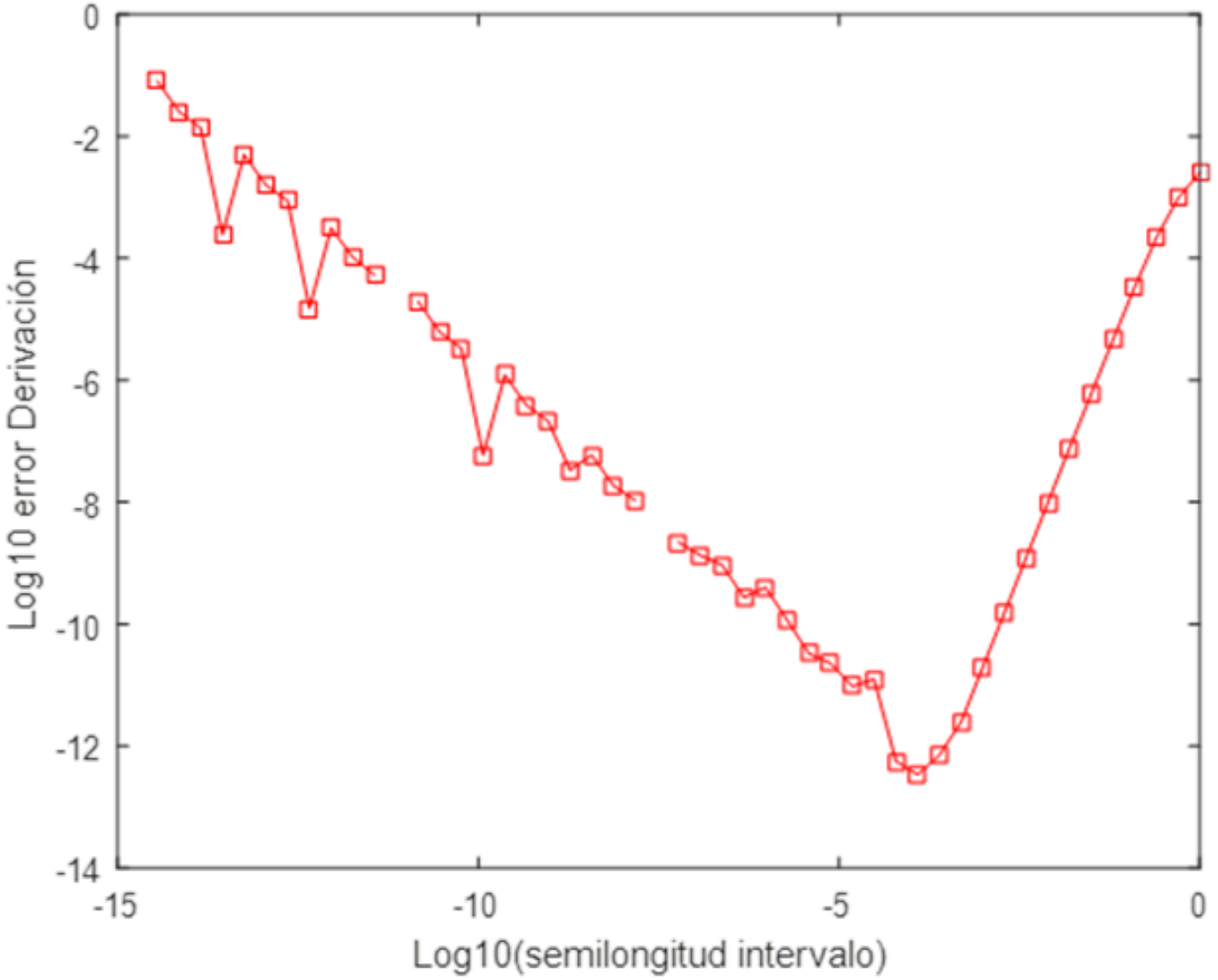
Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO -2

```
>> P7_EJ2
Vex =
     1
H= 1    VEX = 1    VAPR= 1.0025
H= 0.5    VEX = 1    VAPR= 0.99902
H= 0.25    VEX = 1    VAPR= 0.99978
.............................
H= 3.5527e-15    VEX = 1    VAPR= 1.0801
H= 1.7764e-15    VEX = 1    VAPR= 1
H= 1    Error = 0.0025455
H= 0.5    Error = 0.00097625
H= 0.25    Error = 0.00022081
.............................
H= 3.5527e-15    Error = 0.080078
H= 1.7764e-15    Error = 0
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

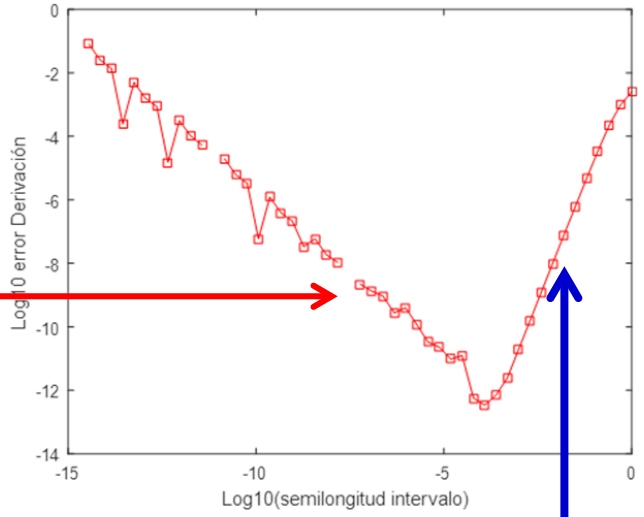
EJERCICIO PROPUESTO -2



Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO -2

*Pero a partir de un determinado **tamaño óptimo**, los errores de redondeo, debidos a la codificación binaria, crecen y se hacen más significativos que los de truncatura, lo que hace que los errores cometidos crezcan al reducir el tamaño de h por debajo de ese tamaño óptimo.*



El error disminuye a medida que se reduce la distancia entre puntos del soporte,. Lo hace "grosso modo" a ¼ cuando el tamaño de h se reduce ½, lo que parece indicar que el error es de orden 2.

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO -3

Considera el polinomio interpolador de Lagrange de una función f(x) sobre el soporte de 2 puntos $\{s_1, s_2\}$:

$$p(x)=f(s_1) + (f(s_2)-f(s_1))/(s_2-s_1)$$

Se pide:

Encontrar la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio que se infiere del polinomio anterior:

$$f'(x^*) = p'(x^*)$$

Aproximar la derivada primera de la función $f(x)=e^x$ en el punto $x^*=0$ utilizando los puntos del soporte $s_0=-h$ y $s_1=h$ para los valores del paso de la discretización h: h=0'1, 0'05, 0'025, ..., hasta alcanzar un tamaño de paso de discretización inferior o igual a $(1\cdot10^{-15})$.

Sabiendo que el valor exacto es f'(0) = 1, representar los errores cometidos para los distintos pasos utilizados.

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO -3

```
% Comenzamos limpiando la memoria
clear
% Declaramos simbólicas las vbles sgtes:
syms x s1 s2 f1 f2  h f(x)
% Expresamos el polinomio interpolador
% según la fórmula de Newton y lo derivamos
% para obtener la fórmula de derivación
% genérica.
f12= (f2-f1)/(s2-s1);
p(x)=f1+f12*(x-s1);
formula=diff(p(x),x);
% Sustituimos el soporte s1 y s2 por -h
% y h respectivamente (h simbólica tb.)
s=[-h,  h];
formula=subs(formula,s1,s(1));
formula=subs(formula,s2,s(2));
```

(…)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO -3

```
(…)
% Definimos la función a utilizar, su 1ª
% derivada, la abscisa en la que se
% aproxima la derivada
f(x)=exp(x);
fd(x)=diff(f(x));
xs=0.;
vex=fd(xs);
% Comenzamos a calcular para distintos
% valores del parámetro de discretización
% que se irán almacenando en la variable H.
% Además se irán contabilizando en la
% variable “J” el número de cada una de las
% aproximaciones que se realicen.
H=0.1;
J=1;
```

(…)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO -3

```
(…)
% Mientras el paso H sea mayor que el menor
% permitido …
while (H > 1.0e-15)
    % … almacenamos su valor en “paso(J)” …
    paso(J)=H;
    % … almacenamos la formula en la
    % variable aux (para conservar la
    % original  y usarla en futuros pasos)…
    aux=formula;
    % … y sustituimos en ella el tamaño del
    %   paso y los valores de la función …
    aux=subs(aux,h,H);
    aux=subs(aux,f1,f(-H));
    aux=subs(aux,f2,f(H));
                                        (…)
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO -3

(…)

```
% … y la abscisa en que se evalúa la
%   derivada, almacenando el resultado
%   evaluado como valor(J) …
valor(J)=eval(subs(aux,x,xs));
% … Evaluamos el error cometido …
errtrunc(J)=abs(vex-valor(J));
% y preparamos la que, en su caso, será
% la siguiente aproximación actualizan-
% do el contador "J" del número de
% aproximación y reduciendo el tamaño
% de paso a la mitad.
J=J+1;
H=H/2;
```

end

(…)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO -3

(…)

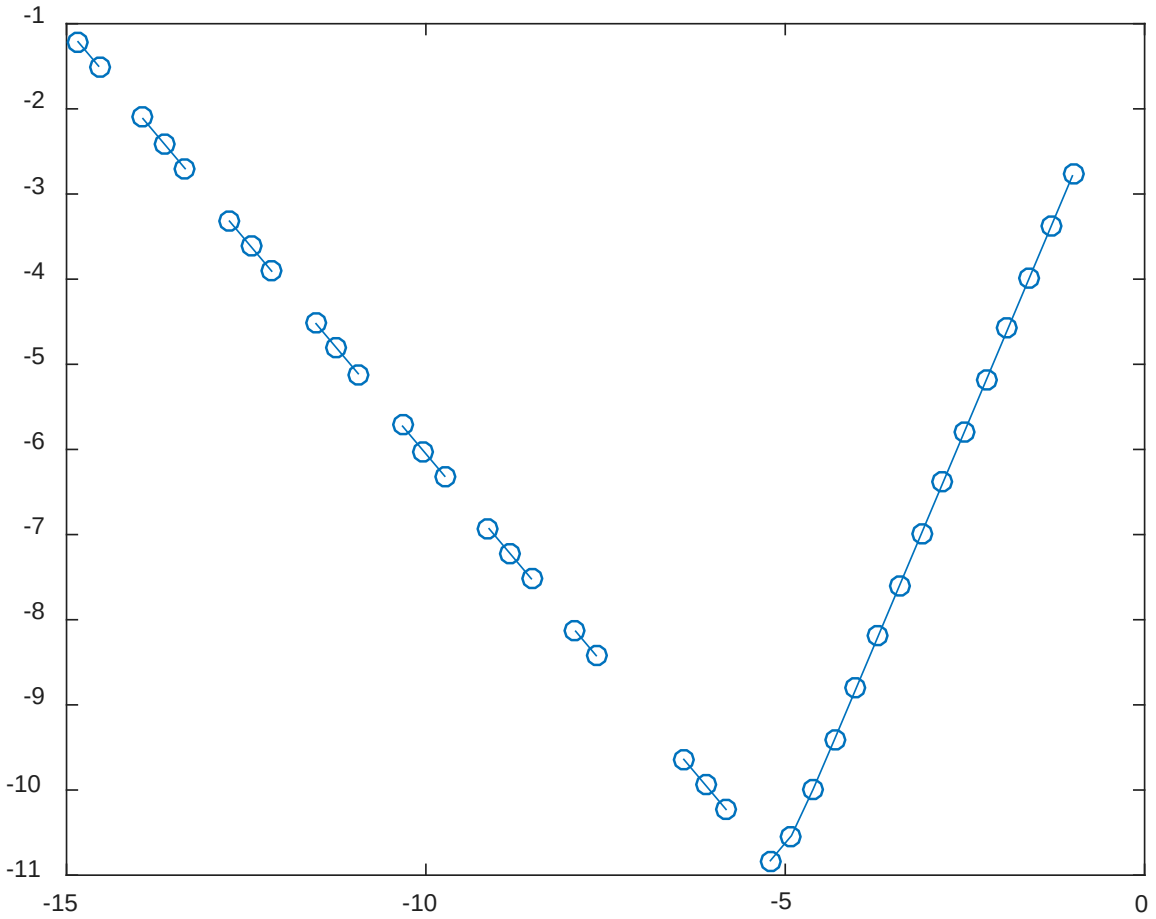
```
% Y finalizamos dibujando el logaritmo del
% error cometido frente al logaritmo del
% paso utilizado en la aproximación
plot(log10(paso),log10(errtrunc), '-o')
```

ARCHIVAMOS ESTE SCRIPT EN EL FICHERO:
P9_EP3.m

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO -3

>> P9_EP3



Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

USO DE FÓRMULAS DE DERIVACIÓN NUMÉRICA

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

TERCER OBJETIVO:

Utilizar las capacidades de CÁLCULO SIMBÓLICO de MATLAB para determinar fórmulas de derivación numérica que aproximen derivadas de orden k , tanto sobre un soporte definido como sobre un soporte simbólico.

EJERCICIO 3º (1er Apartado)

Escríbase una función MATLAB en la que se calculen los **coeficientes** de una fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio que permita aproximar el valor de la derivada k-ésima de una función en un punto x*, estando la fórmula construida sobre un soporte de n abscisas $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$.

DATOS:

k → orden de la derivada a aproximar

n → número de abscisas

s → vector de n abscisas

xstar → abscisa en la que se aproxima el valor de la k-ésima derivada

RESULTADOS:

c → vector con los n coeficientes de la fórmula

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 3º (1er Apartado)

MÉTODO:

Los coeficientes de una fórmula de tipo interpolatorio para aproximar derivadas de orden k en x* son los valores de las k-ésimas derivadas de los polinomios de base de Lagrange, evaluadas en x*.

Paso 1º: Calcular la expresión simbólica de los polinomios de base de Lagrange sobre el soporte s

$$L_J \leftarrow \prod_{\substack{JJ=1 \\ JJ \neq J}}^{n} \frac{(x - s_{JJ})}{(s_J - s_{JJ})}$$

Paso 2º: Derivar k veces cada polinomio de base y evaluar la expresión resultante en x* para obtener el valor de cada coeficiente.

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 3º (1er Apartado)

INICIO

Datos: k, n, **s**, xstar

1º) Para i**, desde** i = 1**, hasta** i = n**, con pas**o 1**, hacer:**

$$L_i(x) \leftarrow \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - s_j)}{(s_i - s_j)}$$

Fin bucle en i.

2º) Para i**, desde** i= 1**, hasta** i = n**, con paso** 1**, hacer:**

Derivar k veces $L_i(x)$

Evaluar: $c_i \leftarrow L_i(xstar)$

Fin bucle en i.

Resultados: c

FIN

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 3º (1er Apartado)

(Detalles de la "1ª Parte")

INICIO

Datos: k, n, **s**, xstar

Para i**, desde** i = 1**, hasta** i = n**, con pas**o 1**, hacer:**

aux ← 1

Para j**, desde** j = 1**, hasta** j = n**, con pas**o 1**, hacer:**

Si (i ≠ j) **entonces hacer**:

aux ← aux·((x-s_j)/(s_i-s_j))

Fin condición.

Fin bucle en j.

L_i ← aux

Fin bucle en i.

....

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 3º (1er Apartado)

(Detalles de la "2ª Parte")

....

Para i, **desde** i = 1, **hasta** i = n, **con paso** 1, **hacer:**

aux ← $L_i(x)$

Para j, **desde** j = 1, **hasta** j = k, **con paso** 1, **hacer:**

$$aux \leftarrow \frac{d}{dx}(aux)$$

Fin bucle en j.

$c_i \leftarrow$ aux(xstar)

Fin bucle en i.

Resultados: c

FIN

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 3º (1er Apartado)

```
function [c]=fP9_EJ3(k,n,s,xstar)
syms aux x L
% PARTE 1ª: Cálculo de los polinomios de
% base de Lagrange asociados al soporte
for J=1:1:n
    aux=1;
    for JJ=1:1:n
        if (JJ~=J)
            aux=aux*(x-s(JJ))/(s(J)-s(JJ));
        end
    end
    L(J)=aux;
end
```

(…)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 3º (1er Apartado)

```
(...)
% PARTE 2ª: Derivamos k veces cada una de
% las expresiones de los polinomios de
% base y particularizamos en xstar.
for J=1:1:n
    c(J)=eval(subs(diff(L(J),k),x,xstar));
end
end
```

ARCHIVAMOS ESTA FUNCIÓN EN EL FICHERO:

fP9_EJ3.m

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 3º (2º Apartado)

b) Escríbase una función MATLAB en la que conocidos el natural **n**, el vector de n elementos **c** = $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, y el vector **f** = $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ con los n valores de una función, evalúe el sumatorio de los productos $(c_i \cdot f_i)$, llamando **vaprox** al resultado.

DATOS: n → número natural positivo
c → vector de n coeficientes
f → vector de n valores

RESULTADOS:
vaprox → valor del sumatorio de $c_i \cdot f_i$

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 3º (2º Apartado)

```
function [valor]=fP9_EJ3_2(c,f)
% Esta función calcula el valor del
% producto escalar del vector c por el
% vector f
    valor=sum(c.*f);
end
```

ARCHIVAMOS ESTA FUNCIÓN EN EL FICHERO:

fP9_EJ3_2.m

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 3º (3er Apartado)

c) Escríbase un script MATLAB en el que, utilizando fórmulas de tipo interpolatorio, se evalúe el valor aproximado de las **cinco** primeras derivadas de la función **$(x^2-|x|^{(1/2)}+1)*(\cos(x^2)-1) / (1+x^2)$** en **x* = 0**, sobre el soporte **{-2, -1/2, 1/3, 1, 2}**.

El script también deberá formar una matriz de 5 filas y n columnas en la que en cada fila se almacenarán los coeficientes de las fórmulas de derivación numérica utilizados.

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 3º (3er Apartado)

```
clear
% Definimos el soporte y proporcionamos
% los valores de xstar y del número de
% órdenes de derivación a aproximar (K).
s=[-2, -1/2, 1/3, 1, 2];
n=length(s);
K=5; xstar=0;
% Definimos la función. Lo hacemos como
% función on line
F=@(x) (x.^2-abs(x).^(1/2)+1).*...
        (cos(x.^2)-1)/(1+s.^2);
% Inicializamos el vector en el que guar-
% daremos las aproximaciones y la matriz
% de los coeficientes de las fórmulas
vaprox=zeros(1,K);
C=zeros(K,n);
```

(...)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 3º (3er Apartado)

```
(...)
% Evaluamos la función en el soporte
f=F(s);
% Para cada valor de k entre 1 y K ejecuta-
% mos la función fP7_EJ3 para calcular los
% coeficientes de la fórmula, y fP7_EJ3_2
% para calcular el valor aproximado de la
% k-ésima derivada en xstar
for k=1:1:K
    c=fP9_EJ3(k,n,s,xstar);
    for J=1:1:n
        C(k,J)=c(J);
    end
    vaprox(k)=fP9_EJ3_2(c,f);
end
```

ARCHIVAMOS ESTE SCRIPT EN EL FICHERO: ***P9_EJ3_c.m***

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 3º (3er Apartado)

En el espacio "Comand Window" de MATLAB

```
>> P9_EJ3_c
>> format short
   vaprox
```

APROXIMACIONES DE

1ª derivada 2ª deriv. 3ª deriv. 4ª deriv. 5ª deriv.

```
vaprox =
   -0.0264   -0.4379    0.0396   -0.5104         0
```

```
>> C
```

COEFICIENTES DE FÓRMULAS PARA DERIVADA:

```
c =
```

1ª →	0.0198	-1.1378	0.9257	0.2222	-0.0300
2ª →	0.0635	1.5644	-4.1657	2.7778	-0.2400
3ª →	-0.4048	1.7067	-1.3886	-0.3333	0.4200
4ª →	0.5714	-5.1200	11.1086	-8.0000	1.4400
5ª →	0	0	0	0	0

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 3º (4º Apartado)

d) Modificar la función `fP9_EJ3` para hallar la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio que permite aproximar f'(x*) con el soporte genérico (x*-2h, x*-h/2, x*+h/2, x*+3h/2).

¿Coincide con la usada en el ejercicio 1º?

$$f'(x^*) \approx \frac{1}{h}\cdot\left(\frac{2}{105}\cdot f\left(x^*-2\cdot h\right)-\frac{13}{12}\cdot f\left(x^*-h/2\right)+\frac{11}{10}\cdot f\left(x^*+h/2\right)-\frac{1}{28}\cdot f\left(x^*+3\cdot h/2\right)\right)$$

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 3º (4º Apartado)

Modificamos la función fP9_EJ3, añadiendo h como variable simbólica

```
function [c]=fP9_EJ3s(k,n,s,xstar)
syms aux x L h
% PARTE 1ª: Cálculo de los polinomios de
% base de Lagrange asociados al soporte
for J=1:1:n
    aux=1;
    for JJ=1:1:n
        if (JJ~=J)
            aux=aux*(x-s(JJ))/(s(J)-s(JJ));
        end
    end
    L(J)=aux;
end
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 3º (4º Apartado)

```
. . .

% PARTE 2ª: Derivamos k veces cada una de
%    las expresiones de los polinomios de
%    base y particularizamos en xstar.
for J=1:1:n
    c(J)=eval(subs(diff(L(J),k),x,xstar));
end
end
```

ARCHIVAMOS ESTA FUNCIÓN EN EL FICHERO:
fP9_EJ3s.m

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 3º (4º Apartado)

```
clear
% Definimos xs, h, el vector s y f(x)
% como simbólicos
syms xs h s f(x)
% Definimos el soporte y el orden de
% la derivada
s=[xs-2*h, xs-h/2, xs+h/2, xs+3*h/2];
K=1;
% Llamamos a la función fP7_EJ3s para
% calcular los coefiientes.
n=length(s);
c=fP9_EJ3s(K,n,s,xs);
display('coeficientes'), c
```

(...)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 3º (4º Apartado)

```
(...)
% Evaluamos simbólicamente la función
% f(x) en los puntos del soporte y
% usamos la función fP7_EJ3_2 para
% determinar la fórmula.
vf=f(s);
[formula]=fP9_EJ3_2(c,vf);
formula
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 3º (4º Apartado)

```
>> P9_EJ3_d
coeficientes
c =
[ 2/(105*h),-13/(12*h),11/(10*h),-1/(28*h)]
formula =
     ( 2*f(xs-2*h))    /(105*h)-
     (13*f(xs- h/2))   /(12*h) +
     (11*f(h/2+xs))    /(10*h)-
         f((3*h)/2+xs) /(28*h)
```

que corresponde a la fórmula:

$$f'(x^*) \approx \frac{1}{h}\cdot\left(\frac{2}{105}\cdot f\left(x^* - 2\cdot h\right) - \frac{13}{12}\cdot f\left(x^* - h/2\right) + \frac{11}{10}\cdot f\left(x^* + h/2\right) - \frac{1}{28}\cdot f\left(x^* + 3\cdot h/2\right)\right)$$

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO 3º

a) Modifíquese el programa anterior para obtener los coeficientes de la fórmula de derivación numérica que permite aproximar f''(x*) utilizando el soporte {x*-2h, x*-h, x*, x*+h, x*+2h}.

b) Evaluar con dicha fórmula las aproximaciones de la 2ª derivada de la función cos(pi*e^{x}) en x*= 1 con el soporte {x*-2h, x*-h, x*+h, x*+2h} para h=1, ½, 2^{-2}, 2^{-3}, …, 2^{-20} y representa en una gráfica la evolución de los errores absolutos cometidos.

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO 3º

```
clear
% Definimos xs, h, el vector s y la función
% f(x) como simbólicos
syms xs h s f(x)
% Definimos el soporte y el orden de
% la derivada
s=[xs-2*h, xs-h, xs,  xs+h, xs+2*h];
K=2;
```

(Cambios)

```
% Llamamos a la función fP7_EJ3s para
% calcular los coefiientes.
n=length(s);
[c]=fP7_EJ3s(K,n,s,xs);
display('coeficientes'), c
```

(…)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO 3º

(…)

```
% Evaluamos simbólicamente la función f(x)
% en los puntos del soporte y usamos la
% función fP9_EJ3_2 para determinar la
% fórmula.
vf=f(s);
[formula]=fP9_EJ3_2(c,vf);
formula
```

(…)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO 3º

```
(...)
% APARTADO B) Definimos ahora la función
% f(x), la derivamos 2 veces y determinamos
% el valor exacto en x=1;
f=@(x) cos(pi*exp(x));
f2=diff(f(x),2);
vex=eval(subs(f2,x,1));
% Particularizamos la fórmula antes hallada
% para el caso xs=1;
formula=subs(formula,xs,1);
% Inicializamos H con el valor inicial
% del paso (en este caso 1) y
% el contador de casos (J) al valor 1.
H=1;  J=1;
```

(...)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO 3º

(...)

```
% Mientras H sea superior al tamño mínimo
% fijado ...
while (H>= 2^(-20))
    aux=formula; % Asignamos a aux la fórm.
    % ... particularizamos la fórmula aux
    %     para el valor que tenga H ...
    aux=subs(aux,h,H);
    % ... la evaluamos almacenando su valor
    % en la J-ésima posición del vector
    % valor ...
    valor(J)=eval(aux);
```

(...)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO 3º

```
(...)
    % ... almacenamos en el vector Paso el
    % tamaño de H utilizado y en el vector
    % Error el error cometido
    Paso(J)=H;
    Error(J)=abs(vex-valor(J));
    % ... Preparamos el caso siguiente,
    % reduciendo el tamaño de H a la
    % mitad e incrementando J en una unidad
    J=J+1;
    H=H/2;
end
```

(...)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO 3º

```
(...)
% Escribimos resultados
display(['Valor exacto = ',num2str(vex)])
for K=1:1:J-1
    display(['Tamaño del paso: ', ...
                num2str(Paso(K)),...
     ' Aproximación = ', num2str(valor(K))])
end
% Realizamos gráfica de evolución del error
plot(log10(Paso),log10(Error),'-sb')
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO 3º

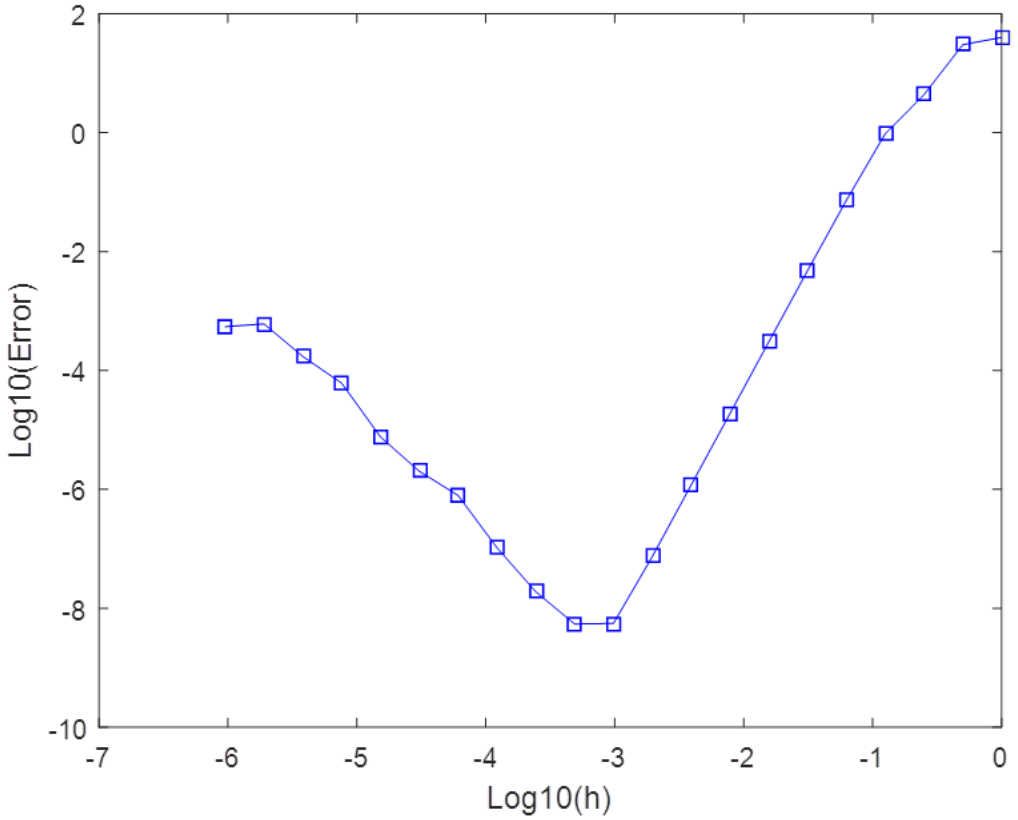
```
>> P9_EP3
coeficientes
c =
[-1/(12*h^2),4/(3*h^2),-5/(2*h^2),
                        4/(3*h^2), -1/(12*h^2)]
formula =
(4*f(xs-h))/(3*h^2) - (5*f(xs))/(2*h^2) -
f(xs-2*h)/(12*h^2) - f(2*h+xs)/(12*h^2) +
(4*f(h+xs))/(3*h^2)

Valor exacto = 39.5722
Tamaño del paso = 1 Aproximación = -0.31951
Tamaño del paso = 0.5 Aproximación = 9.4885
Tamaño del paso = 0.25 Aproximación = 43.9143
  ..................................................
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO PROPUESTO 3º

```
.....................................................
Tamaño del paso = 3.8147e-06 Aproximación = 39.5724
Tamaño del paso = 1.9073e-06 Aproximación = 39.5728
Tamaño del paso = 9.5367e-07 Aproximación = 39.5728
```



Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

USO DE FÓRMULAS DE DERIVACIÓN NUMÉRICA

CUARTO OBJETIVO:

Utilizar las capacidades de CÁLCULO SIMBÓLICO de MATLAB para determinar fórmulas de derivación numérica que aproximen derivadas de orden k , así como el orden de error y de exactitud de las fórmulas, tanto sobre un soporte definido como sobre un soporte simbólico.

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 1º)

Apartado 1º: Escríbase una **función MATLAB** en la que combinando desarrollos en serie de Taylor del valor de una función genérica en las abscisas de un soporte de n abscisas expresadas respecto a x*, se calculen los **coeficientes** de una fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio que permita aproximar el valor de la derivada k-ésima de una función en el punto x*. Determínese también el coeficiente de la **expresión del error** de truncatura de la fórmula y el grado de derivación que aparece en dicha expresión para el caso en el que la función a derivar se suponga suficientemente regular.

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 1º)

FORMA DE ABORDARLO

Suponiendo el soporte ordenado de menor a mayor, denominaremos H al valor: $\mathbf{H = s_n - s_1}$.

Cada punto del soporte lo expresaremos en la forma:

$$s_J = s_J + x^* - x^* = x^* + (s_J - x^*) = x^* + ((s_J - x^*)/H) \cdot H \rightarrow$$

$$\rightarrow s_J = x^* + \theta_J \cdot H, \quad \text{con } \boldsymbol{\theta_J = (s_J - x^*)/H} \quad (J=1, 2, \ldots, n)$$

Si f es derivable al menos n veces, se podrá escribir:

$$\mathbf{f(s_J) = f(x^* + \theta_J \cdot H) = f(x^*) + \theta_J \cdot H \cdot f'(x^*) + \theta_J^2 \cdot \frac{H^2}{2} \cdot f''(x^*) +}$$

$$\mathbf{+ \theta_J^3 \cdot \frac{H^3}{3!} \cdot f'''(x^*) + \ldots + \theta_J^k \cdot \frac{H^k}{k!} \cdot f^{(k}(x^*) + \ldots + \theta_J^n \cdot \frac{H^n}{n!} \cdot f^{(n}(x^*) + \ldots}$$

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 1º)

En la expresión de $\sum_{J=1}^{n} c_J \cdot f(s_J)$ el término que multiplicará a $f^{(k}(x^*)$ es:

$$\left(c_1\theta_1^k + c_2\cdot\theta_2^k + ... + c_J\cdot\theta_J^k + ... + c_n\cdot\theta_n^k\right)\cdot\frac{H^k}{k!}\cdot f^{(k}(x^*) \qquad (k=0, 1, 2, \ldots)$$

Para que sea una fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio se deben anular los n primeros términos de esta combinación de desarrollos en serie, salvo el correspondiente a la derivada k-ésima. Por ello, los coeficientes deben verificar que:

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 1º)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \cdots & \theta_j & \cdots & \theta_n \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 & \theta_3^2 & \cdots & \theta_j^2 & \cdots & \theta_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_1^i & \theta_2^i & \theta_3^i & \cdots & \theta_j^i & \cdots & \theta_n^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_1^{n-1} & \theta_2^{n-1} & \theta_3^{n-1} & \cdots & \theta_j^{n-1} & \cdots & \theta_n^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{i+1} \\ \vdots \\ c_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{i+1} \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

con: $b_j = 0$ (j=1,…,k, k+2,…) y $b_{k+1} = k! / H^k$

$$\mathbf{P \cdot c = b \rightarrow c = P^{-1} \cdot b}$$

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 1º)

siendo el "resto" de la combinación de desarrollos en serie de Taylor:

$$\left(c_1\theta_1^n + c_2\cdot\theta_2^n + ... + c_j\cdot\theta_j^n + ... + c_n\cdot\theta_n^n\right)\cdot\frac{H^n}{n!}\cdot f^{(n}(\xi)$$

Si ese sumando de la combinación de desarrollos fuese nulo se buscaría entre los siguientes, el primero no nulo

$$\left(c_1\theta_1^m + c_2\cdot\theta_2^m + ... + c_j\cdot\theta_j^m + ... + c_n\cdot\theta_n^m\right)\cdot\frac{H^m}{m!}\cdot f^{(m}(\xi)$$

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 1º)

INICIO

Entrada: k, n, **s**, x*

H ← (s_n-s_1)

Para J, **desde** J = 1, **hasta** J = n, **con paso** 1, **hacer:**

$$\theta_J \leftarrow \frac{S_J - X^*}{H}$$

Fin bucle en J.

Para J, **desde** J= 1, **hasta** J = n, **con paso** 1, **hacer:**

Para L, **desde** L=1, **hasta** L=n, **con paso** 1, **hacer:**

$$P_{J,L} \leftarrow \theta_L^{(J-1)}$$

Fin bucle en j.

Si (J ≠ k+1) **entonces:**

b_J ← 0

sino

b_J ← k!/H^k

Fin condición.

Fin bucle en J.

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 1º)

c ← P^{-1}·b

coef ← 0

m ← n-1

Mientras (coef =0) **hacer**:

m ← m+1

Para J, **desde** J=1, **hasta** J=n, **con paso** 1, **hacer:**

coef ← coef+ $c_J.\theta_J^m$

Fin bucle en J.

Fin bucle condicional

R ← coef·H^m/m!

Resultados: c, R

FIN

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 1º)

```
function [c, CTE, m]=fP9_EJ4(k,s,xstar)
% Evaluamos el número de puntos de soporte
n=length(s);
% Cálculo del vector theta tal que
%        s(J)= xstar+theta(J)*(s(n)-s(1))
H= s(n)-s(1);
for J=1:1:n
    theta(J)=(s(J)-xstar)/H;
end
% Construcción dela matriz del sistema
P(1,1:n)=1;
for J=2:1:n
    P(J,1:n)=P(J-1,1:n).*theta(1:n);
end
```

(...)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 1º)

```
(…)
% Evaluamos el vector b
b(1:n,1)=0;
if (k<n)
   b(k+1)=factorial(k)/H^k;
End
% Resolvemos el sistema P·c=b
P1=inv(P);
c=P1*b;
% Calculamos el vector aux con sus
% componentes iguales a las n-ésimas
% potencias de cada elemento de theta.
aux(1,1:n)=P(n,1:n).*theta(1:n);
```

(…)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 1º)

```
(…)
% y evaluamos el producto escalar de aux
% por el vector de coeficientes c
valor=aux*c;
m=n;
% Mientras el producto escalar anterior
% sea inferior en valor absoluto al
% epsilon de la máquina (2.2204·10^(-16))
% se incrementa la potencia de los
% elementos de aux recalcula c·aux
while (abs(valor)<2.2204e-16)
      m=m+1;
      aux(1,1:n)=aux(1,1:n).*theta(1:n);
      valor=aux*c;
end                                    (…)
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 1º)

```
(…)
% Determinada el orden de derivación (m)
% que aparece en la expresión del error,
% determinamos la constante que aparecerá
% en la expresión del mismo.
CTE=valor*H^m/factorial(m);
end
```

La función anterior se salva en el fichero:
fP9_EJ4.m

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 2º)

Apartado 2º: Escríbase un **script** en el que **utilizando la función MATLAB** `fP9_EJ4` escrita en el apartado anterior, se determine la fórmula de derivación numérica que permite aproximar la derivada tercera de una función en x*=2 con el soporte {1.70, 1.85, 2 , 2.15, 2.30} así como la **expresión del error** de truncatura de dicha fórmula si se supone que se aplica a funciones f(x) suficientemente regulares.

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 2º)

```
% Introducimos los datos dados
k=3; xstar=2;
s=[1.70, 1.85, 2.00, 2.15, 2.30];
% Utilizamos la función fP7_EJ4 escrita
% anteriormente
[c, CTE, m]=fP9_EJ4(k,s,xstar);
% Fórmula
vf=f(s);
coef=double(c);
formula=vf*coef
% ESCRIBIMOS INFORMACIÓN SOBRE EL ERROR DE
% LA FÓRMULA
display(['Orden del error = ',...
          num2str(m-k)])
```

(...)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 2º)

```
(...)
display(['Orden de exactitud = ', ...
          num2str(m-1)])
display(['Error = ',num2str(CTE),...
         ' * diff(f,',num2str(m),')'])
```

Salvamos este script con el nombre:
P9_EJ4_2.m

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 2º)

```
>> P7_EJ4_2
formula =
(7818749353073783*f(2))/
   396140812571321687967719751 68 -
(4000*f(17/10))/27 + (4000*f(23/10))/27 +
(8000*f(37/20))/27 - (8000*f(43/20))/27

Orden del error = 2
Orden de exactitud = 4
Error = 0.005625 * diff(f,5)
```

El coeficiente de f(2) en la fórmula anterior es $1.9737 \cdot 10^{-13}$ y se debe al error de redondeo, siendo la fórmula:

$$f'''(2) \approx \frac{1}{27}\left(4000 \cdot \left(-f(1.7) + f(2.3)\right) + 8000 \cdot \left(f(1.85) - f(2.15)\right)\right)$$

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 3º)

<u>Apartado 3º:</u> Modifíquense la función desarrollada en el apartados primero para determinar las fórmulas de derivación numérica de tipo interpolatorio sobre soportes genéricos, así como para determinar el orden de error de la fórmula

La principal dificultad de este ejercicio consiste en que los coeficientes que se determinen resolviendo el sistema tendrán expresiones simbólicas, lo que impide el comparar con un valor numérico (el épsilon de la máquina) los restos de Taylor.

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 3º)

Más concretamente, si se está aproximando una derivada k-ésima los coeficientes tendrán expresiones de la forma:

$$c_J = \frac{C_J}{H^k}$$

donde H es la longitud de referencia que se elija y C_J es un valor numérico.

En otros términos, si f(x) es suficientemente regular el error se expresará en las formas:

$$R_f(x^*) = \underbrace{\left(\sum_{J=1}^{n} c_J \cdot \theta_J^m\right)}_{\text{CTE}} \cdot H^m \cdot f^{(m}(\xi) = \underbrace{\left(\sum_{J=1}^{n} C_J \cdot \theta_J^m\right)}_{\text{CTE1}} \cdot H^{(m-k)} \cdot f^{(m}(\xi)$$

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 3º)

En la función siguiente se buscará el entero m evaluando el valor de CTE1 y comparándolo con el épsilon de la máquina.

La función se presenta primero comentada y después sin los comentarios explicativos.

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 3º)

```
function [c,CTE1,CTE,m]=fP9_EJ4_3(k,s,xs)
% ESTA FUNCIÓN CALCULA LOS COEFICIENTES Y
% PARÁMETROS DEL ERROR DE TRUNCATURA DE UNA
% FÓRMULA DE DERIVACIÓN NUMÉRICA DE TIPO
% INTERPOLATORIO QUE APROXIME LA k-ÉSIMA
% DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN xstar ESTANDO
% SOPORTADA SOBRE EL CONJUNTO DE ABSCISAS
% ALMACENADAS EN EL VECTOR s.
%
%  Argumentos de entrada:
%    k  ---- Orden de derivación
%    s  ---- Soporte de abscisas. Puede ser
%            un soporte simbólico (genérico)
%    xs --   Abscisa en la que se evalúa la
%            k-ésima derivada. Puede ser una
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 3º)

```
(...)
%              variable simbólica (genérica).
%
%  Argumentos de salida:
%    c  ---- Vector de coeficientes de la
%              fórmula
%    CTE1 -- Constante del término de error
%              multiplicada por H^k para que
%              sea una constante numérica
%    CTE -- Constante del término de error
%    m   --- Orden de derivación resultante
%              en el término de error.
%
% Declaramos simbólicas la matriz del
% el vector de segundos términos y el de
% coeficientes del sistema
                                        (...)
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 3º)

(…)

```
syms P b c
% n es el nº de puntos del soporte. Con él
% dimensionamos vectores y matrices que
% utilizaremos
n=length(s);
baux=zeros(n,1);
P=NaN(n,n);
c=NaN(n,1);
theta=NaN(n,1);
% H = longitud de referencia (aquí usamos
% la distancia entre primer y último puntos
% del soporte.
H= s(n)-s(1);
```

(…)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 3º)

```
(...)
% Calculamos el vector de parámetros
% theta(J) (relación entre la distancia de
% s(J) a xs y la longitud de referencia
for J=1:1:n
    theta(J)=(s(J)-xs)/H;
end
% Construimos la matriz del sistema (P) y
% el vector de segundo término (b)
P(1,1:n)=1;
for J=2:1:n
    for K=1:n
        P(J,K)=P(J-1,K)*theta(K);
    end
end
```

(...)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 3º)

(...)

```
if (k<n)
    baux(k+1,1)=factorial(k);
end
b=double(baux)/H^k;
% Resolvemos el sistema para determinar los
% coeficientes de la fórmula
c=inv(P)*b;
% Recuperamos los valores numéricos de los
% coeficientes almacenándolos en C, multi-
% plicando c por H^k (que aparecerá en los
% denominadores de c)
C=eval(c*H^k);
```

(...)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 3º)

```
(...)
% Determinamos el valor del producto
% escalar de C por el vector con las
potencias n-ésimas de los parámetros theta
valor=0;
for K=1:n
        valor=C(K)*theta(K)^n;
end
% Si el valor es inferior al epsilon de la
% máquina, hacemos m (orden de derivación
% que interviene en el error) igual a n. En
% caso contrario, buscamos el primer entero
% m superior a n para el que las suma de
% C(K)*theta(K)^m sea inferior a epsilon.
m=n;
                                        (...)
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 3º)

```
(…)
while (abs(valor)<2.2204e-16)
      m=m+1;
      valor=0;
      for K=1:n
            valor=C(K)*theta(K)^m;
      end
end
% El error tiene la expresión
%    Rf(x*) = CTE1*H^(m-k)*diff(f,m)
%
CTE1=valor/factorial(m);
CTE=CTE1*H^(m-k);
end
```

Salvamos este script con el nombre: **MCI_DERk.m**

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 3º)

```
function [c,CTE1,CTE,m]=fP9_EJ4_3(k,s,xs)
syms P b c
n=length(s); baux=zeros(n,1);
P=NaN(n,n);  c=NaN(n,1); theta=NaN(n,1);
H= s(n)-s(1);
for J=1:1:n
    theta(J)=(s(J)-xs)/H;
end
P(1,1:n)=1;
for J=2:1:n
    for K=1:n
        P(J,K)=P(J-1,K)*theta(K);
    end
end
```

(...)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 3º)

```
 (…)
if (k<n)
    baux(k+1,1)=factorial(k);
end
b=double(baux)/H^k;
c=inv(P)*b;
C=eval(c*H^k);
valor=0;
for K=1:n
        valor=C(K)*theta(K)^n;
end
m=n;
```

(…)

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 3º)

```
(…)
while (abs(valor)<2.2204e-16)
      m=m+1;
      valor=0;
      for K=1:n
            valor=C(K)*theta(K)^m;
      end
end
CTE1=valor/factorial(m);
CTE=CTE1*H^(m-k);
```

Salvamos este script con el nombre:
fP9_EJ4_3.m

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 4º)

Apartado 4º: Escríbase un **script** en el que **utilizando la función MATLAB** `fP9_EJ4_3` escrita en el apartado anterior, se determine la fórmula de derivación numérica que permite aproximar la derivada tercera de una función en x* con el soporte {x*-2h, x*-h, x* , x*+h, x*+2h} así como la **expresión del error** de truncatura de dicha fórmula si se supone que se aplica a funciones f(x) suficientemente regulares.

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 2º)

```
clear
syms h xs f(x)
k=3; s=[xs-2*h,xs-h,xs,xs+h,xs+2*h];
[CFORM,CTE1,beta,m]=MCI_DERk(k,s,xs);
F=f(s);
disp(['Orden de derivada a aproximar:',...
        num2str(k)])
formula=F*CFORM
disp(['Orden de exactitud= ',num2str(m-1)])
disp(['Orden de error = ',num2str(m-k)])
disp(['Orden de derivación = ',num2str(m)])
disp(['Constante de error = ']),beta
disp(['Error = ',num2str(CTE1),'*H^',...
  num2str(m-k),'*diff(f,',num2str(m),')'])
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 2º)

```
>> P9_EJ4_4
Orden de derivada que se aproxima: 3

formula =
   f(xs-h)/h^3 - f(xs-2*h)/(2*h^3) +
   f(2*h+ xs)/(2*h^3) - f(h+xs)/h^3

Orden de exactitud = 4
Orden de error = 2
Orden de derivación = 5
Constante de error =
      beta = (2*h^2)/15

Error = 0.0083333*H^2*diff(f,5)
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 2º)

NOTA: Obsérvese que H = s(5)-s(1) = 4h, por lo que

```
Error = 0.0083333*H^2*diff(f,5)

      = (1/120)*16*h^2*diff(f,5) =
      = (2/15)*h^2*diff(f,5)
```

lo que coincide con el valor:

```
Constante de error =
     beta = (2*h^2)/15
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 5º)

Apartado 5º: Utilícese la fórmula anterior para aproximar el valor de la tercera derivada de la función $f(x) = \cos(e^x)$ en el punto $x^* = \pi/2$ y con los siguientes valores de h:

$$0.1,\ 0.01,\ 0.001,\ 0.0001,\ \ldots\ldots,\ 10^{-15}$$

Represéntese en una gráfica (con ejes logarítmicos) la evolución del error y coméntese si se ajusta o no al orden de error anteriormente determinado.

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 5º)

```
clear
syms h xs f(x)
k=3; s=[xs-2*h,xs-h,xs,xs+h,xs+2*h];
[CFORM,CTE1,beta,m]=fP9_EJ4_3(k,s,xs);
F=f(s);
formula=F*CFORM;
f=@(x) cos(exp(x));
xstar=pi/2;
formula=subs(formula,xs,xstar)
vex=eval(subs(diff(f(x),k),x,xstar));
fm(x)=diff(f(x),m);
haux=1;
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

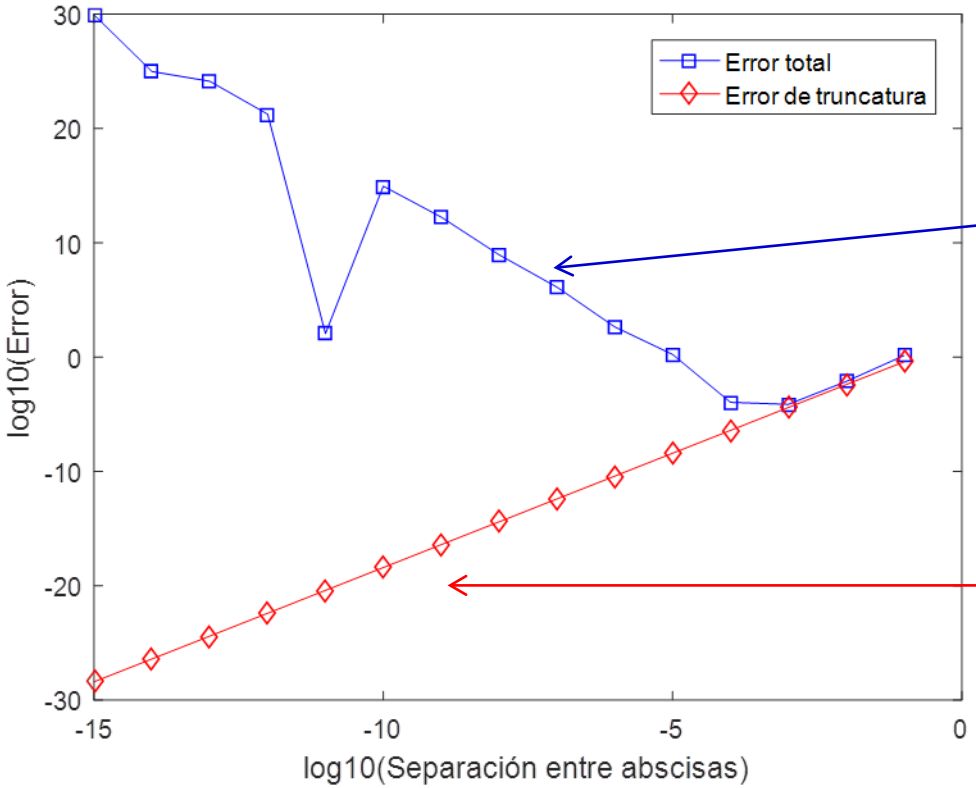
EJERCICIO 4º (Apartado 5º)

```
for ICASO=1:15
    haux=haux/10;
    Paso(ICASO)=haux;
    vapr(ICASO)=eval(subs(formula,h,haux));
    Ertr(ICASO)=abs(vex-vapr(ICASO));
    R(ICASO)=abs(eval(subs(beta,h,haux)...
                  *fm(xstar)));
end
plot(log10(Paso),log10(Ertr),'-sb',...
     log10(Paso),log10(R),'-dr')
xlabel('log10(Separación entre abscisas)')
ylabel('log10(Error)')
legend('Error total','Error de truncatura')
```

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

EJERCICIO 4º (Apartado 5º)

```
>> P9_EJ4_5
   formula =
   f(pi/2-h)/h^3 - f(h+pi/2)/h^3 –
   f(pi/2-2*h)/(2*h^3)+f(2*h+ pi/2)/(2*h^3)
```



Error total. Cuando el redondeo se hace preponderante. Se incrementa al disminuir h

Error de truncatura. Disminuye cuadráticamente

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

Depto. de Ingeniería Geológica y Minera
E.T.S. de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid